

2017.3.20

道脇 裕

Hiroshi Michiwaki

密度の原理, もたらされる剰余式ゼロ除算

半径 R , 高さ h で密度 ρ が一様な全質量 M の円柱体と, これが載置される全面の半径 $r_0 \geq R$ の平坦な円形の受圧面 A_0 が, 一様な重力加速度 g の空間内に存在するものとする.

すると, この空間系内において, 全質量 M が受ける全重力 F は,

$$F = Mg \quad (1)$$

と表される.

ここで, 半径 r_0 の平坦な円形の受圧面 A_0 のうち, 検討対象とする受圧面 $A \leq A_0$ を考え, この受圧面 A を半径 r で受圧面 A_0 と同心円を成す平坦な面, 即ち検討対象受圧面 A であるとする. このとき, 検討対象受圧面 A 上に無い円柱体の質量を M_{out} とすれば, 全重力 F は(1)式より,

$$Mg = ps + M_{out}g \quad (2)$$

と表される. ただし, ここで, p は検討対象受圧面 A が受ける圧力であり, s は検討対象受圧面 A の面積であって, $s(r) = \pi r^2$ と表される. 従って, 検討対象受圧面 A 上に在る円柱体の質量を M_{in} とすれば, 圧力 p は,

$$p = \frac{M_{in}g}{\pi r^2} \quad (3)$$

で与えられる. これより, (3)式を(2)式に代入して, 重力加速度 g を消去すると,

$$M = \frac{M_{in}}{\pi r^2} s + M_{out} \quad (4)$$

を得る. これは, また

$$\frac{M}{s} = \frac{M_{in}}{\pi r^2} + \frac{M_{out}}{s} \quad (5)$$

と表すことができる. 或いは, 検討対象受圧面 A 上における質量面密度を $\sigma(r)$ とおけば, (4)式は,

$$M = \sigma(r)s + M_{out} \quad (6)$$

と表される. ここで, 除算の視点で(5)式及び(6)式を観れば, 全質量 M は被除数, 質量面密度 σ は商, 面積 s は除数, 検討対象受圧面外質量 M_{out} は剰余項と見なすことが出来る. 即ち,

(6) 式は,

$$\frac{M}{s} = \sigma(r) \cdots M_{out} \quad (7)$$

と表すことが出来るといえる. ただしここで, “ \cdots ” は, “ \cdots ” 以降に表記の M_{out} が当該

除算の剰余項であることを意味する.

さて、いま、検討対象受圧面 A の面積 $s(r)$ を、受圧面 A_0 の半径 r_0 を元の大きさに固定したまま、半径 r のみを縮小して、受圧面 A_0 中の小さな検討対象受圧面 A についてこの系を考察することにする。つまり、元の系から状態を変えることなく、思考対象とする検討対象受圧面 A の大きさだけを変えて、(4)~(7)式を考察するのである。勿論、検討対象のみを思考実験上変化させるだけであり、系そのモノに影響を及ぼすことはなく変化はないので、結果は元来の系のそれと一致していなければならない。

ここで、質量面密度 $\sigma(r)$ は、

$$\sigma(r) = \frac{M_{in}}{\pi r^2} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\pi r^2} = \rho h \quad (r > 0) \quad (8)$$

であって、いま r を徐々に小さくして行くのだから検討対象受圧面 A 上に無い部分が拡大する。従って、ドーナツ形の検討対象受圧面外質量 M_{out} は、

$$M_{out} = \rho \pi (R^2 - r^2) h \quad (9)$$

と表される。ゆえに、(6)式、(8)式、(9)式の間係をまとめると全質量 M は、

$$\begin{aligned} M &= M_{in}(r) + M_{out}(r) \\ &= \rho h s + \rho \pi (R^2 - r^2) h \\ &= \rho \pi r^2 h + \rho \pi (R^2 - r^2) h \\ &= \rho \pi R^2 h \quad (r > 0) \quad (10) \end{aligned}$$

である。この(10)式は、当該系における検討対象受圧面 A の面積 s の半径 r に対応した質量の遷移機構を表しているといえる。ここで、対象受圧面 A を $r=0$ とすると、検討対象受圧面 A の面積 s は、 $s=0$ となって最早それは面ではなく大きさの無い点となるため、検討対象受圧面 A 上の円柱の体積 $v=\pi r^2 h$ は、 $v(0)=0$ となる。従って、面積ゼロの点上の質量は、必然的に質量 $M_{in}(r)=\rho v(r)=\rho v(0)=0$ となる。このことは、面積 $a=0$ の面は、点であって存在しない面 (空 $\phi=0$) とも換言でき、また点上、即ち存在しない面 (空 ϕ) 上の質量 m も (また空 $\phi=0$ であって) $m=0$ であり、面積 a も質量 m も共にゼロ (空 ϕ) で両者は存在しないのであるから質量面密度 σ も存在せず (空 ϕ であり)、 $\sigma=0$ となることを物語っている。即ち、

$$\sigma(0) = 0 \quad (11)$$

が成り立つことは明白である。以下、この関係性を質量面密度の原理 (或いは質量面密度以外の密度にも適用可能であることから単に“密度の原理”といってもよいであろう。) と呼ぶ。質量面密度の原理より、

$$\sigma(r)s = \sigma(r)s(r) = \sigma(0)s(0) = 0 \times 0 = 0 \quad (12)$$

となって、(6)式の第1項がゼロになることが判る。他方、これと同時に、(6)式の第2項は、(9)式からも明らかな通り、

$$M_{out} = M_{out}(r) = M_{out}(0) = \rho \pi (R^2 - 0^2) h = \rho \pi R^2 h = M \quad (13)$$

が成り立つことが解る。つまり、(6)式は、

$$M = 0 \times 0 + M_{out} \quad (14)$$

となることを意味し、先述の通り、全質量 M を被除数、質量面密度 σ を商、面積 s を除数、検討対象受圧面外質量 M_{out} を剰余項と見なすことが出来、(7)式を踏まえると、これは、

$$\frac{M}{0} = 0 \cdots M_{out} \quad (M_{out} = M) \quad (15)$$

と表されることが解る。ただし、ここで、“ \cdots ”は、 M_{out} が当該除算の剰余項であることを意味する。従って、当該物理系は、剰余式ゼロ除算の形式を用いることによって、当該物理系を数学的に表すことが出来ることを物語っているといえる。逆に、当該物理系は、数学的に剰余式ゼロ除算が正しいことを示しているともいえる。なお、(15)式の関係を以下、質量面密度の第1法則と呼ぶものとする。

次に、この系における円柱体が載置される平坦な円形の全受圧面 A_0 の半径 r_0 が、円柱体の半径 R に対して、 $r_0 < R$ となる場合を考える。つまり、検討対象受圧面 $A=A_0$ ($r=r_0$) を考えるのである。勿論、この空間系内において、全質量 M が受ける全重力 F は、

$$F = Mg \quad (16)$$

と表される。ここで、半径 r_0 の平坦な円形の受圧面 A_0 は、検討対象とする受圧面 $A=A_0$ を考え、この受圧面 A を半径 r の平坦な円形面、即ち検討対象受圧面 A であるとする。このとき、検討対象受圧面 A には当該系内の質量が集中する一方で、検討対象受圧面 A に載らない円柱体の質量を M_{off} とすれば、全重力 F は(16)式より、

$$Mg = ps + M_{off}g \quad (17)$$

と表される。ただし、ここで、 p は検討対象受圧面 A が受ける圧力であり、 s は検討対象受圧面 A の面積であって、 $s(r)=\pi r^2$ と表される。従って、検討対象受圧面 A 上に載る円柱体の質量を M_{on} とすれば、圧力 p は、

$$p = \frac{M_{on}g}{\pi r^2} \quad (18)$$

で与えられる。これより、(18)式を(17)式に代入して、重力加速度 g を消去すると、

$$M = \frac{M_{on}}{\pi r^2} s + M_{off} \quad (19)$$

を得る。これは、また

$$\frac{M}{s} = \frac{M_{on}}{\pi r^2} + \frac{M_{off}}{s} \quad (20)$$

と表すことができる。或いは、検討対象受圧面 A 上における質量面密度を $\sigma(r)$ とおけば、(19)式は、

$$M = \sigma(r)s + M_{off} \quad (21)$$

と表される。ここで、除算の視点で(20)式及び(21)式を観れば、全質量 M を被除数、質量面

密度 σ を商, 面積 s を除数, 検討対象受圧面外質量 M_{off} を剰余項と見なすことが出来る. 即ち, (21) 式は,

$$\frac{M}{s} = \sigma(r) \cdots M_{off} \quad (22)$$

と表すことが出来る. ただしここで, “...” は, “...” 以降に表記の M_{off} が当該除算の剰余項であることを意味する.

さて, 今度は, 検討対象受圧面 A の面積 $s(r)$ を受圧面 A_0 と共に縮小し, 半径 R の円柱体の底面よりも全受圧面 A_0 を小さくしてこの系を考えることにする. つまり, 元の系と比して, 円柱体の大きさや形状を一定としておきながら, 思考対象とする検討対象受圧面 A (= A_0) の大きさだけを変えて, (19)~(22)式を考察するのである. 勿論, 全受圧面である検討対象受圧面 A を変化させるので系には変化が生じるが, 全質量 M に変化は生じないことはいうまでもないことである.

ここで, 質量面密度 $\sigma(r)$ は,

$$\sigma(r) = \frac{M_{on}}{\pi r^2} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\pi r^2} = \rho R^2 h \frac{1}{r^2} \quad (r > 0) \quad (23)$$

であって, いま r を徐々に小さくして行くのだから検討対象受圧面 A における質量面密度 $\sigma(r)$ は r の 2 乗に反比例して急速に増大するといえる. また, (21)式と(23)式より全質量 M は,

$$\begin{aligned} M &= \rho R^2 h \frac{1}{r^2} s + M_{off}(r) \\ &= \rho \pi R^2 h + M_{off}(r) \\ &= M_{on}(r) + M_{off}(r) \quad (r > 0) \end{aligned} \quad (24)$$

と表される. この(24)式は, 当該系における検討対象受圧面 A の面積 $s(r)$ の半径 r に対応した質量の遷移機構を表しているといえる. 他方, 検討対象受圧面外質量 M_{off} は, 検討対象受圧面 A が有限の面積を有する限りにおいては, 全ての質量 M が検討受圧面 A に載っているのであるから,

$$M_{off} = 0 \quad (r > 0) \quad (25)$$

が成り立つ.

ここで, 対象受圧面 A を $r=0$ とすると, 検討対象受圧面 A の面積 $s(0)$ は, $s=0$ となって最早それは面ではなく大きさの無い点となる. すると, この大きさの無い点, 即ち, 検討対象受圧面 A の面積 $s(0)$ 上に載る質量 $M_{on}(r)$ は, 質量面密度の原理より, 存在しないといえる (存在しない面積の上に質量を載せることは不可能であるからこれは明白な事実, 自明の理である.). よって,

$$M_{on}(r) = M_{on}(0) = 0 \quad (26)$$

となる. また,

$$\sigma(0) = 0 \quad (27)$$

が成り立つ (これは, $p=\sigma g=\sigma(0)g=0\times g=0$ であって, 面積ゼロの面にかかる面圧はゼロであるといえる.). 従って, (21)式の第1項がゼロになること即ち,

$$\sigma(r)s = \sigma(r)s(r) = \sigma(0)s(0) = 0 \times 0 = 0 \quad (28)$$

となることが判る. 他方, これと同時に, (21)式の第2項は, 検討対象受圧面 A に載っていない質量 M_{off} であるという定義から,

$$M_{off} = M_{off}(r) = M_{off}(0) = \rho\pi R^2 h = M \quad (29)$$

が成り立つことが解る. つまり, (21)式は,

$$M = 0 \times 0 + M_{off} \quad (30)$$

となることを意味し, 先述の通り, 全質量 M は被除数, 質量面密度 σ は商, 面積 s は除数, 検討対象受圧面外質量 M_{off} は剰余項であると見なすことが出来, 即ちこれは,

$$\frac{M}{0} = 0 \cdots M_{off} \quad (M_{off} = M) \quad (31)$$

そのもの (ただし, ここで, “ \cdots ” は, M_{off} が当該除算の剰余項であることを意味する.) であり, 剰余式ゼロ除算によれば, 当該系を数学的に記述することが出来ることを物語っているといえる.

勿論, (30)式の辺々に重力加速度 g を乗じると,

$$F = Mg = (0 \times 0 + M_{off})g = 0 \times g + M_{off}g = M_{off}g \quad (32)$$

であるから, 検討対象面積ゼロの面 (点) にかかる重力がゼロであって, 他方, 検討対象面積外質量にかかる重力が全重力 F に一致することを意味し, 同時にこれは, 面に支えられる質量が存在せず, 全質量が重力によって落下することを示している.

つまり,

- 1) 大きさがゼロである点に対して質量が集中するというような現象が生じることはない.
- 2) コップが置かれたテーブルの面中に非可算無限個存在する点の面圧は各々ゼロである. といえる. 換言すると, 面積ゼロの面, 即ち点における質量面密度や面圧, 重力等が無限大になったり, 発散したり, 不定となったり, あらゆる値をとったりすることは全く無く, 点にかかるこれらの値は常にゼロであることが容易に解る. まして点上の質量が無限大になったり, 全質量がゼロになったりすることも無く, また点にかかる重力が無限大になることも無いといえる. なお, (8)式並びに(23)式に示される質量面密度 $\sigma(r)$ はそれぞれ,

$$\sigma(r) = \frac{M_{in}}{\pi r^2} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\pi r^2} = \rho h \left(\frac{r}{r}\right)^2 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ \rho h & (r > 0) \end{cases} \quad (8')$$

$$\sigma(r) = \frac{M_{on}}{\pi r^2} = \frac{\rho\pi R^2 h}{\pi r^2} = \rho h \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ \rho h \left(\frac{R}{r}\right)^2 & (r > 0) \end{cases} \quad (23')$$

となる. 従って, これらをまとめた次式を得る.

$$\sigma(r) \begin{cases} = 0 & (r = 0) \\ > 0 & (r > 0) \end{cases} \quad (33)$$